INTEGRALES DOUBLES

Classification Thèmes de MégaMaths

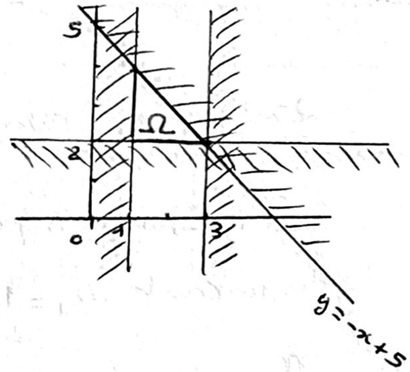
Docs de Dany-Jack MERCIER

Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $I = \iint_\Omega \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$ où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 1 < x < 3 \,,\; y > 2 \,,\; x+y < 5\}$

b) $I = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ avec $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x|+|y| < 1\}$ dans chacun des cas :

- $f(x,y) = y\,e^{x^2}\sin(x^2+y^2)$
- ∙∙ $f(x,y) = \sin\left(xy^2\sqrt{y^2+x^2+1}\right)$
- ∴ $f(x,y) = y^2$
- ∷ $f(x,y) = x^2$

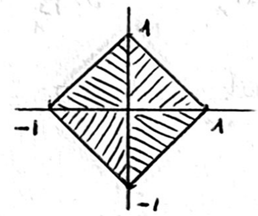


a) $I = \int_{x=1}^{3} \int_{y=2}^{-x+5} \frac{1}{(x+y)^3}\,dy\,dx$

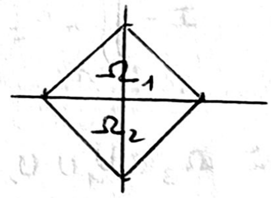
$= \int_{x=1}^{3} \left[\frac{1}{-2(x+y)^2}\right]_{y=2}^{-x+5} dx = -\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{25} - \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$

$\boxed{I = \frac{2}{75}}$

b) $\Omega = \{(x,y) \;/\; |x|+|y| < 1\}$ est le carré :



- Ω_1 et Ω_2 sont symétriques / à Ox, donc :



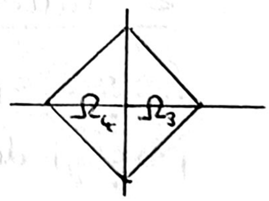
$\iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,-y)\,dx\,dy$

(par chgt de variable)

Ainsi $I = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy) = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_1} f(x,-y)\,dx\,dy$

$\boxed{I = 0}$ puisque $f(x,-y) = -f(x,y)$.

∙∙ Cette fois-ci $f(-x,y) = -f(x,y)$. Comme Ω_3 et Ω_4 sont symétriques / à Oy, le m̂ argument que préc. donne : $\boxed{I = 0}$



(Deug A 1^re année 92-93)

$\bullet\bullet$ $$\iint_\Omega y^2\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{0}\int_{y=-x-1}^{x+1} y^2\,dy\,dx + \int_{x=0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1} y^2\,dy\,dx$$

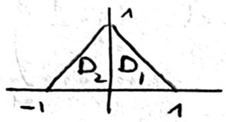
$$= \int_{-1}^{0}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{3}\right]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(x+1)^3\,dx + \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^1 (1-x)^3\,dx}_{=\int_0^{-1}(1+t)^3(-dt)}$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} 2(x+1)^3\,dx = \boxed{\frac{1}{3}}$$

<u>2-solution</u> : Comme au $\bullet$, $I = \iint_\Omega y^2\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} y^2 + \iint_{\Omega_2} y^2 = 2\iint_{\Omega_1} y^2$

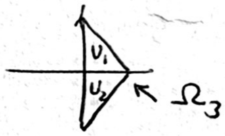
car $y \mapsto y^2$ est paire en x.

En notant $\Omega_1 = D_1 \cup D_2$ où , on obtient

$$\iint_{\Omega_1} y^2 = \iint_{D_1} y^2 + \iint_{D_2} y^2 \quad \text{et} \quad \iint_{D_2} y^2 = \iint_{D_1} y^2, \text{ donc } \iint_{\Omega_1} y^2 = 2\iint_{D_1} y^2$$

Finalement $I = 4\iint_{\Omega_1} y^2 = 4\int_0^1\int_0^{1-x} y^2\,dy\,dx = \frac{1}{3}$

$\because$ $I = \iint_\Omega x^2 = \iint_{\Omega_3} x^2 + \iint_{\Omega_4} x^2 = 2\iint_{\Omega_3} x^2 = 4\iint_{U_1} x^2$ par sym /à Ox,

où $\Omega_3 = U_1 \cup U_2$ et 

donc $I = 4\int_{x=0}^{1} x^2 \int_{y=0}^{-x+1} dy\,dx = 4\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{3}$.

<u>2-solution</u> : Soit s la symétrie orth. /à la première bissectrice.

On a $s\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ d'où un Jacobien $\left|\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right| = 1$, et par chgt de variable, Ω étant stable par s :

$$I = \iint_\Omega x^2\,dx\,dy = \iint_{s^{-1}(\Omega)} y^2\,dx\,dy = \iint_\Omega y^2\,dx\,dy = \frac{1}{3} \text{ précédemment}$$

calculé !

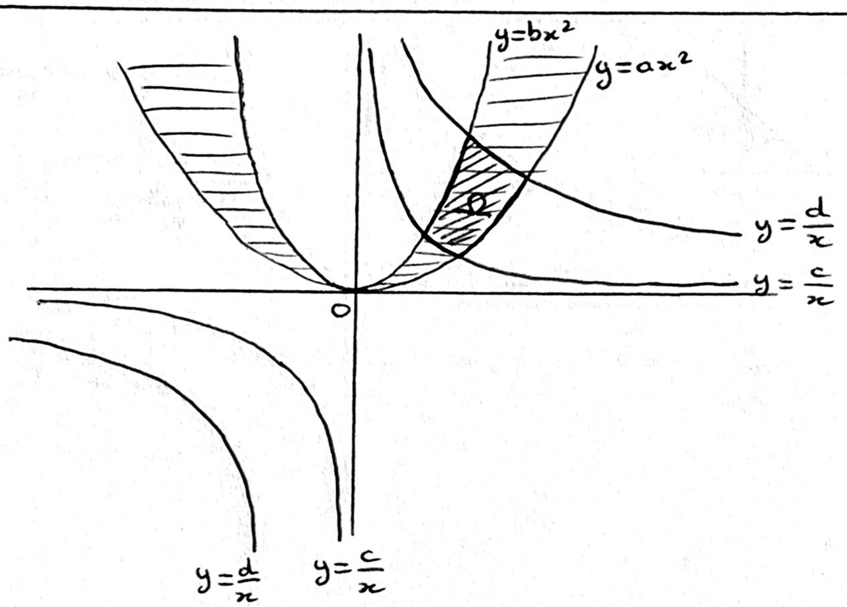
Soient a, b, c, d 4 réels positifs tels que $0<a<b$ et $0<c<d$. On considère le domaine Ω formé des points M de coordonnées (x,y) vérifiant $ax^2 \leq y \leq bx^2$ et $\frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x}$

1) Représenter graphiquement le domaine Ω

2) En utilisant le changement de variables $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$, calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\Omega} x^3 \, dx \, dy$$

1)



2) $I = \iint_{\Omega} x^3 \, dx \, dy = \iint_R \frac{v}{u} \, |J\varphi(u,v)| \, du \, dv$

où R est le rectangle $\begin{cases} a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d \end{cases}$.

On trouve : $\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} \\ y = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

d'où la matrice jacobienne

$$J\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

et le jacobien de φ :

$$|J\varphi(u,v)| = \left| -\frac{1}{9} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{9} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \right| = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}}$$

$$I = \frac{1}{3} \iint_R u^{-\frac{5}{3}} v^{\frac{2}{3}} \, du \, dv = \frac{1}{3} \left(\int_a^b u^{-\frac{5}{3}} du \right) \left(\int_c^d v^{\frac{2}{3}} dv \right)$$

$$= \boxed{\frac{3}{10} \left(a^{-\frac{2}{3}} - b^{-\frac{2}{3}} \right) \left(d^{\frac{5}{3}} - c^{\frac{5}{3}} \right)}$$

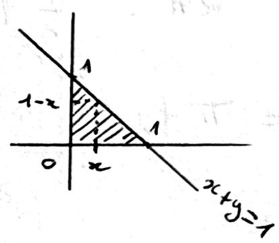
Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\iint_D xy \, dx \, dy$ $\quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0 \,,\, y \geq 0 \,,\, x + y \leq 1 \}$

b) $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$ $\quad D$ est la surface du triangle de sommets $O(0,0)$; $A(1,1)$; $B(2,0)$

c) $\iint_\Delta \dfrac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$ $\quad \Delta$ est le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

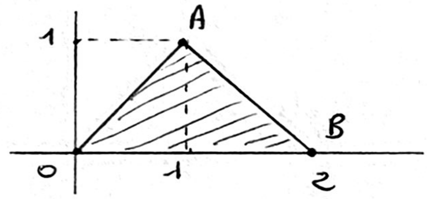
a) $I = \iint_D xy \, dx \, dy$



$$= \int_{x=0}^{1} x \int_{y=0}^{1-x} y \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{24}$$

b)



$$I = \iint_D (x+y) \, dx \, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} (x+y) \, dy \, dx + \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{2-x} (x+y) \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x^2 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx + \int_{x=1}^{2} x(2-x) + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx$$

$$= \frac{4}{3}$$

(Deug A 1ère année, UAG, 93-94)

c) Passage en polaire :

$$I \doteq \iint_{\Delta} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\substack{0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \frac{1}{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \,.\, \int_{\rho=0}^{1} \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho$$

$$= 2\pi \,.\, \frac{1}{2}\left[\ln(1+\rho^2)\right]_0^1$$

$$= \pi \ln 2$$

a) Calculer $I = \iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$

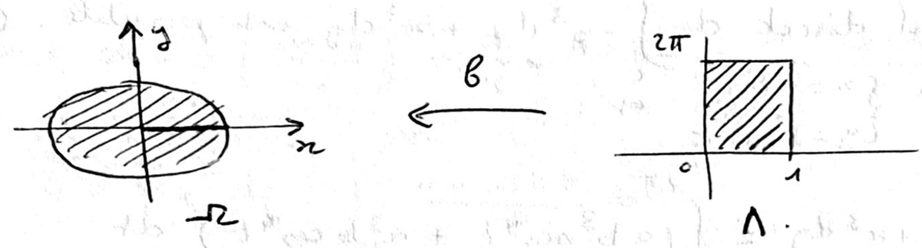
où $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$, $a>0$, $b>0$.

On pourra utiliser le chgt de variable $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$

b) En déduire $\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy$ où C est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcourue dans le sens direct.

a) Si $f(\rho,\theta) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta) = (x,y)$, on a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \iff \rho^2 < 1 \iff 0<\rho<1$$ si on prend $\rho>0$.



f est un C^1-difféomorphisme de $\mathring{\Lambda}$ sur $\mathring{\Omega}\setminus[Ox)$, et son jacobien est :

$$|df(\rho,\theta)| = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix} = ab\rho$$

$$I = \iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_\Lambda \rho^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta).\, ab\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= ab\int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{ab}{4}\int_0^{2\pi} a^2\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{ab}{4}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot 2\pi$$

$$\boxed{I = \frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}}$$

(POUR LE A), LE MATERIEL EST DEJA TAPE EN uind0008)

.../...

b) Formule de Green-Rieman :

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

où $\partial \Omega = C$

Ici, l'on obtient $\int_C -y^3 dx + x^3 dy = \iint_\Omega (3x^2+3y^2)\,dx\,dy = \frac{3\pi}{4} ab(a^2+b^2)$

NB : Le calcul direct de $\int_C -y^3 dx + x^3 dy$ est possible. On paramètre l'ellipse par $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ et :

$$I = \int_C -y^3 dx + x^3 dy \triangleq \int_0^{2\pi} (ab^3 \sin^4 t + a^3 b \cos^4 t)\,dt$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\right) dt = \frac{3\pi}{4} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4 t\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\right) dt = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

donc $I = \frac{3\pi}{4} ab(a^2+b^2)$ comme prévu.

Calculer $I = \iint_\Omega x^2y^2\,dx\,dy$ où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$

Faisons un passage en coordonnées polaires,

$$I = \iint_D \rho^2\cos^2\theta \,.\, \rho^2\sin^2\theta \,.\, \rho\,d\rho\,d\theta \quad \text{où } D = \{(\rho,\theta) / 0<\rho<1 \text{ et } 0<\theta<2\pi\}$$

$$= \iint_D \rho^5 \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta$$

On a $\sin^2\theta.\cos^2\theta = \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos 4\theta}{2} = \frac{1-\cos 4\theta}{8}$,

puis
$$I = \int_0^1 \rho^5\,d\rho \,.\, \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\theta}{8}\,d\theta$$

$$I = \frac{\pi}{24}$$

(Deug A 1$^{\text{re}}$ année 92-93)

Calculer $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$ sur $\Omega = \{(x,y) \,/\, x>0, y>0, x+y<1\}$ en utilisant le changement de variable $u = x+y$, $v = x-y$.

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

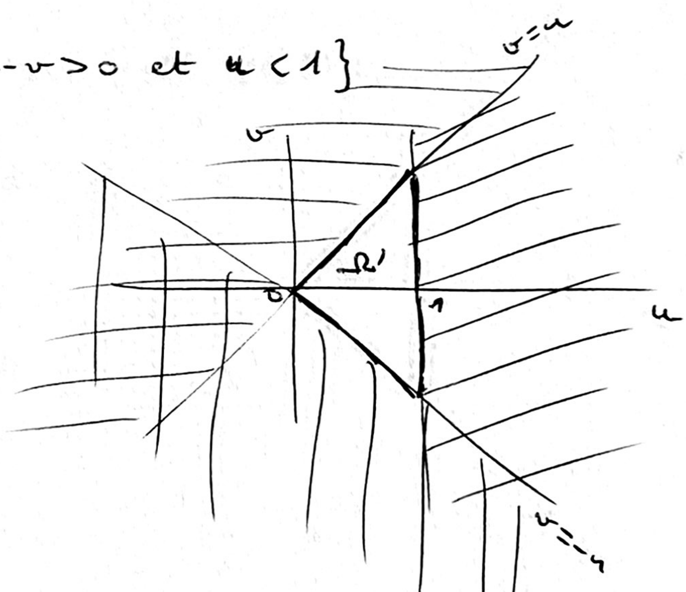
Ces dernières équations définissent un appl. C^∞ $\varphi : (u,v) \mapsto (x,y)$, de jacobien en (u,v) :

$$J\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Donc

$$I \doteq \iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} e^{\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv$$

où $\Omega' = \{(u,v) \,/\, u+v>0,\ u-v>0 \text{ et } u<1\}$



$$I = \frac{1}{2}\int_{u=0}^{1} \int_{v=-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\,dv\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=0}^{1} \left[u\, e^{\frac{v}{u}}\right]_{-u}^{u} du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (ue - ue^{-1})\,du$$

$$= \frac{e-e^{-1}}{2}\int_0^1 u\,du$$

$$= \frac{e-e^{-1}}{4}$$

(TD deug MIAS 2e année, UAG 94-95)

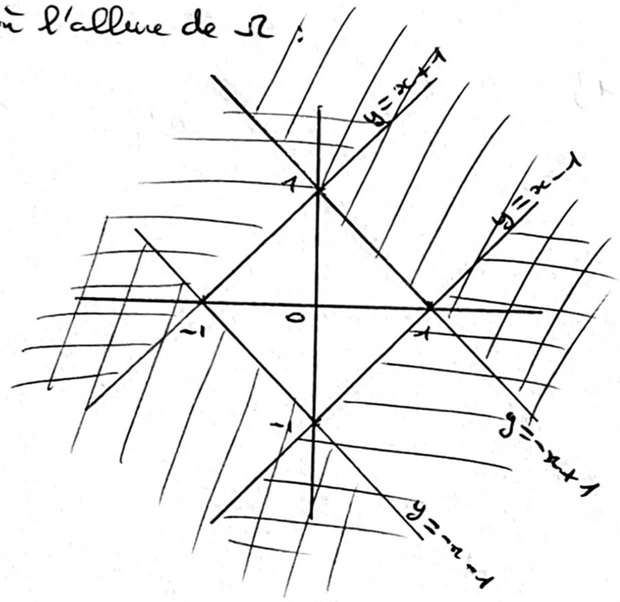
Soit $\Omega = \{(x,y) / |x-y| < 1 \ , \ |x+y| < 1\}$
Représenter Ω. Calculer $\iint_\Omega e^{x+y}\,dx\,dy$

On a

$|x-y| < 1 \iff -1 < x-y < 1 \iff x-1 < y < x+1$

$|x+y| < 1 \iff -1 < x+y < 1 \iff -x-1 < y < -x+1$

d'où l'allure de Ω :



Ω est un carré.

$$\int_\Omega e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{0}\int_{y=-x-1}^{x+1} e^{x+y}\,dy\,dx + \int_{x=0}^{1}\int_{y=x-1}^{-x+1} e^{x+y}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} e^x\,[e^y]_{-x-1}^{x+1}\,dx + \int_0^1 e^x\,[e^y]_{x-1}^{-x+1}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(e^{2x+1} - e^{-1})\,dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1})\,dx$$

$$= e - \frac{1}{e}$$

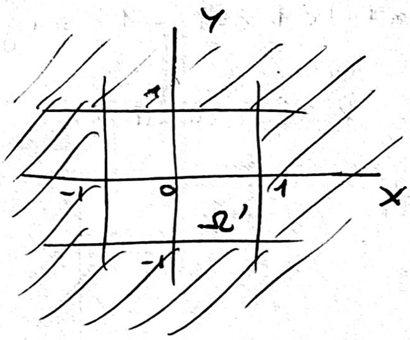
.../...

2ᵉ solution : Chgt de variable

$$\begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases} \iff \varphi \begin{cases} x = \frac{1}{2}(X+Y) \\ y = \frac{1}{2}(-X+Y) \end{cases}$$

$$J\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$I = \iint_{\Omega} e^{x+y}\, dx\, dy = \iint_{\Omega'} e^{Y} \cdot \frac{1}{2}\, dX\, dY$$



avec $\Omega' = \{(X,Y) \ / \ |X| < 1 \text{ et } |Y| < 1\}$

D'où un calcul plus facile :

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} dX\right)\left(\int_{-1}^{1} e^{Y}\, dY\right)$$

$$I = e - e^{-1}$$